**7.1 极化多项式曲面** 2020年7月21日10点59分

在本章中，我们将研究多项式曲面。在对多项式方面的传统参数定义进行了快速回顾之后，我们研究了根据极形式定义多项式曲面的可能性。因为涉及的多项式包含两个变量，所以有两种自然的方法可以极化多项式表面。第一种方法产生双多项式曲面（也称为张量积曲面），第二种方法产生总度数曲面。双多项式表面完全由控制点的矩形网络确定，而总度数表面完全由控制点的三角形网络确定。de Casteljau算法分为两个版本,一个用于矩形网,另一个用于三角网.我们展示了如何将这些版本的de Casteljau算法转化为细分方法.对于矩形网,很容易使用针对多项式曲线开发的算法。但是，在三角网的情况下，事情变得更加棘手，我们提供了一种有效的细分方法。我们还将展示如何根据给定网络针对新矩形（或新三角形）计算新的控制网络.

我们从多项式曲面的传统定义开始。正如我们将看到的，有两种自然的方法可以极化多项式曲面。直观上，这取决于我们决定用矩形还是用三角形平铺参数平面。这是处理曲面比处理曲线复杂得多的众多迹象之一。

回想一下,仿射线表示为,仿射平面表示为.为了减少上标的数量,我们还将仿射平面表示为.我们假设选择了一些固定的仿射参考系,通常是典型的仿射参考系,其中和.令为的有限维仿射空间,令为的仿射参考系.

**定义7.1.1** 多项式曲面是函数,因此,对于所有,我们有

其中是中的多项式.给定自然数和,如果每个多项式的总度数,则我们说是总度数的多项式曲面.如果在所有中的最大度数,并且在所有中的最大度数,我们说是度数的双多项式曲面.曲面的轨迹是集合.

的仿射参考系是固定的,为了简化表示,我们将表示为.直观地,通过使用多项式映射弯曲和扭曲实际仿射平面来获得多项式表面.例如,以下多项式定义了中总阶数为2的多项式曲面:

以上也是度数为的双多项式曲面.另一个称为Enneper曲面的示例如下:

如上所述,Enneper的表面是总度为3的表面,并且是度数为的双多项式曲面.

给定一个多项式曲面,有两种自然的极化方法.

**极化的第一种方法**是分别处理变量和,并分别在和中进行极化.这样,如果和使得为的双多项式曲面,我们得到多仿射映射

它的前个参数和后个参数分别对称,但在所有参数中不对称.

请注意,我们故意表示

作为.

我们得到了传统上称为张量积的曲面.该方法的优点是它允许使用许多适用于曲线情况的算法.请注意,在这种情况下,

曲面是一个映射.但是,由于与是同构的,因此我们可以将视为多项式曲面.

**第一种方法对应7.2,7.3节的内容**.

**极化的第二种方法**是将变量和视为一个整体,即作为中点的坐标,并同时极化两个变量中的多项式.这样,如果使得是总阶的多项式曲面,我们将得到多重仿射映射

在所有个参数中都是对称的.从某种意义上说,这种方法是Béezier曲线的泛化.确实,因为

**第二种方法对应7.4,7.5节的内容**.

我们将介绍这两种方法,并研究de Casteljau算法的适当概括.首先,我们考虑几个例子来说明两种极化方式.我们从第一种极化方法开始,我们分别在和中极化.使用线性,足以说明如何相对于双度极化形式的单项式.其中和.不难看出

现在让我们回顾一下如何将两个变量的多项式作为总度为的多项式进行极化,以准备示例2。使用线性,足以处理一个单项式.根据引理4.5.1,给定单项式,且,我们得到以下次数为m的极形式:

剩下的都是例题，看懂例题就完全理解了多项式曲面的极化形式.

这次,如果我们要查找控制点,则似乎存在问题.实际上,对称多仿射映射是根据平面中的点相对于仿射参考系的坐标定义的,而不是重心仿射参考系.为了通过多重仿射扩展,需要用重心坐标表示极坐标形式.可以转换以坐标w.r.t表示的极性形式,从仿射参考系到重心坐标,但有一个解决此明显问题的简单方法,我们将这种转换留作练习.解决该问题的方法是观察相对于仿射参考系的坐标的中的每个点也都由其重心坐标相对于重心仿射框架重心仿射参考系而来的.现在,对于重心仿射参考系,每一个点，其中,可以表示为,其中,我们可以展开

通过多重亲仿射对称性,我们可以看到可以表示为六个控制点.因此,如果我们只想要六个控制点的坐标,则只需要评估在坐标上以坐标表示的原始极坐标形式.比如的和.

上述所使用的变量是二元值,不是单个标量,例如,.结合例题3和例题4比较容易理解.

本节学习评分：5分.

**7.2双多项式曲面的极形式** 2020年7月22日10点19分-2020年10月16日10点04分

给定度数为的二项式曲面,其中的维数为n,对定义F的每个多项式应用引理4.5.1,首先关于U,然后关于 V,我们得到极形式

结合以上定义多仿射映射

使得在其第一个参数中是对称的,在其最后一个参数中是对称的,并且

对所有.

定义7.2.1 对上述文字的重新描述.

**中间一大段文字通过张量讨论双多项式曲面,这里略过**.

**引理7.2.2** 令和是仿射线的任意两个仿射参考系,而是仿射空间(有限维).对任意自然数以及中个点的任何族,都有一个唯一的度数为的二项式曲面,其极性形式具有-多仿射对称映射

使得

对于所有和所有.此外,由下列表达式给出

可以根据伯恩斯坦多项式和将表面上的点表示为

7.3 矩形曲面补丁的de Casteljau算法 2020年10月22日09点41分

给定一个矩形控制网,我们可以先计算点

其中通过将de Casteljau算法应用于B´ezier控制点获得

,然后通过将de Casteljau算法应用于控制点来计算

对于每一个,我们首先计算点,其中且

且,我们令.

归纳法很容易表明

并且由于,我们得到

接下来,我们计算点,其中,并且

且,令.

归纳法很容易表明

因此,

7.4 总度数曲面的极形式 2020年10月22日10点55分

给定一个总度为m的曲面的,其中E为维n，对U和V均采用引理4.5.1到定义F的每个多项式Fi（U，V），我们得到极坐标形式

定义7.4.1 给定维数的任何仿射空间,具有极形式的总度为的曲面是一个映射,使得存在一些对称的多重仿射映射

并且

对所有成立.曲面的极线是集合.

引理7.4.2 给定仿射平面中的参考三角形,给定中个点的任何族,存在唯一总度数为m的曲面,由对称仿射极性形式定义,使得

对所有成立.此外,由下列表达式给定

其中,,且.曲面F上的点可以被表达成Bernstein多项式,即

其中,且.

末尾的一段文字值得阅读.

由于时间关系，本节剩余内容略过.